

**1. Řešení soustav lineárních rovnic****Vstup:**

Soustava lineárních rovnic ve tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

tj. např. pro 3 rovnice o 3 neznámých

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

**Cíl:**Hodnoty vektoru  $\vec{x}$ **Princip:**

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

**Postup:**

1. Sestavit správně matici soustavy  $\mathbf{A}$  a vektor pravých stran  $\vec{b}$
2. Přesvědčit se o řešitelnosti soustavy: Determinant matice  $\mathbf{A}$  musí být nenulový – použití funkce DETERMINANT
3. Vypočítat inverzní matici  $\mathbf{A}^{-1}$  – použití funkce INVERZE
4. Vypočítat vektor neznámých  $\vec{x}$  jako součin inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$  a vektoru pravých stran  $\vec{b}$  - použití funkce SOUČIN.MATIC
5. O správnosti výpočtů je možno se přesvědčit zkouškou – tj. součin matice soustavy  $\mathbf{A}$  a vektoru neznámých  $\vec{x}$  by měl vyjít shodný s vektorem pravých stran  $\vec{b}$

**Upozornění:**

- o je třeba hlídat rozměry výsledků jednotlivých operací
- o funkce, jejichž výsledkem je pole, se potvrzují do buněk stiskem CTRL+SHIFT+ENTER
- o u matic záleží na pořadí násobení a na jejich rozměrech
- o je třeba si být vědom možných nepřesností výpočtů mezivýsledků, tj. nula nemusí být přesně nula, ale např.  $3,5 \cdot 10^{-14}$

**Jednoduchý příklad:**Vyřešte 2 rovnice o 2 neznámých:  $x+2y=3$  a  $9=5x+1$ .

Řešení:

A (matice soustavy)		vektor pr. str. (b)	
1	2	3	
-5	0	-8	
determinant A		10	
A <sup>-1</sup> (inverzní matice)			
0	-0,2		
0,5	0,1		
x (vektor řešení)		zkouška	
1,6		3	
0,7		-8	

## 2. Řešení nelineárních rovnic

### Vstup:

nelineární rovnice nejčastěji ve tvaru

$$f(x)=0 \quad (1)$$

### Cíl:

najít jeden (nebo více) kořen rovnice, tj. takové číslo x, pro které bude rovnice (1) platit

### Princip:

například Newtonova metoda, která nachází hledaný kořen postupným zpřesňováním hrubého odhadu kořene  $x_0$  podle rovnice (2)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2)$$

### Postup:

- Nalézt hrubý odhad kořene (kořenů), tj. nalézt separační interval(y), tj. nalézt takový interval(y), kde funkce  $f(x)$  mění znaménko. Jak? Tabeleací funkce, popř. z grafu. Jednu z krajních mezí (vhodnou) zvolím za  $x_0$ .
- A. NÁSTROJE-HLEDAT ŘEŠENÍ  
B. NÁSTROJE-ŘEŠITEL  
C. použití vzorce (2)

### Upozornění:

- o pozor na podmínky použití Newtonovy metody!
- o při použití postupu A,B pozor na požadovanou přesnost
- o při použití postupu C je nutno správně určit analytickou derivaci funkce  $f'(x)$

### Jednoduchý příklad:

Najděte kořeny rovnice  $x^2-x-5=0$ .

Řešení:

**Tabelle funkce na zvoleném intervalu a se zvoleným krokem**

x	f(x)=x <sup>2</sup> -x-5
-3	7
-2	1
-1	-3
0	-5
1	-5
2	-3
3	1

**Hledání 1.kořene:**

A. Nástroje-Hledat řešení

2	1
---	---

Měněná buňka se vzorcem

B. Nástroje-Řešitel

2	1
---	---

Měněná buňka se vzorcem

C. Výpočet iterací Newtonovy metody

i	x	f(x)=x <sup>2</sup> -x-5	f'(x)=2x-1
0	-2	1	-5
1	-1,8	0,0400	-4,6
2	-1,7913043	0,0001	-4,5826087
3	-1,7912878	0,0000	

### 3. Numerická integrace

**Vstup:**

naměřené hodnoty závisle proměnné  $y$  v bodech nezávisle proměnné  $x$ . Předpokládáme, že  $y=f(x)$  ( $y$  je funkcí  $x$ )

$x$	$y$
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
...	...
$x_N$	$y_N$

**Cíl:**

hodnota (číslo)  $I$  určitého integrálu z daných naměřených hodnot

**Princip:**

Přesnou hodnotu  $I = \int_a^b f(x)dx$  nahradíme přibližným výpočtem podle zvoleného pravidla

	A. Obdélník		B. Lichoběžník
i-tá ploška	AA.zleva: $O_i=(x_{i+1}-x_i).y_i$	AB. zprava: $O_i=(x_{i+1}-x_i).y_{i+1}$	$L_i=(x_{i+1}-x_i).(y_{i+1}+y_i)/2$
celý integrál	$I = \sum_{i=1}^{N-1} O_i \quad (1)$		$I = \sum_{i=1}^{N-1} L_i \quad (2)$

**Postup:**

- počítáme každou plošku zvlášť a nakonec je sečteme

**Upozornění:**

- o hledáme-li integrál z analyticky dané funkce  $y=f(x)$ , je nutno ji nejprve tabelovat se zvoleným krokem  $h=(b-a)/N$ , potom  $x_{i+1}=x_i+h$
- o počet obdélníků (lichoběžníků) je o 1 menší než počet hodnot!

**Jednoduchý příklad:**

Určete hodnotu integrálu z funkce dané tabulkou naměřených hodnot nezávisle proměnné  $x$  a závisle proměnné  $y$ .

$x$	$y$
0,5	1,25
0,7	1,49
1	2
2	5

Řešení:

$i$	$x$	$y$	Obdélník zleva	Obdélník zprava	Lichoběžník
1	0,5	1,25	0,25	0,298	0,274
2	0,7	1,49	0,447	0,6	0,5235
3	1	2	2	5	3,5
4	2	5	2,697	5,898	4,2975
			Hodnota integrálu podle zvoleného pravidla		

#### 4. Numerická derivace

**Vstup:**

naměřené hodnoty závisle proměnné  $y$  v bodech nezávisle proměnné  $x$ . Předpokládáme, že  $y=f(x)$  ( $y$  je funkcí  $x$ )

$x$	$y$
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
...	...
$x_N$	$y_N$

**Cíl:**

hodnoty derivace sledované veličiny v daných bodech, tj. pro každé  $x$  chceme hodnotu  $y'$

**Princip:**

použití tříbodové formule pro určení derivace

v prvním bodě - podle rovnice (1),

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \quad (1)$$

posledním  $N$ -tém bodě - podle rovnice (2)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_N = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} \quad (2)$$

a ve vnitřních bodech intervalu – podle rovnice (3)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_i = \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} \quad (3)$$

**Postup:**

pouze implementujeme vzorce na patřičné řádky tabulky

**Upozornění:**

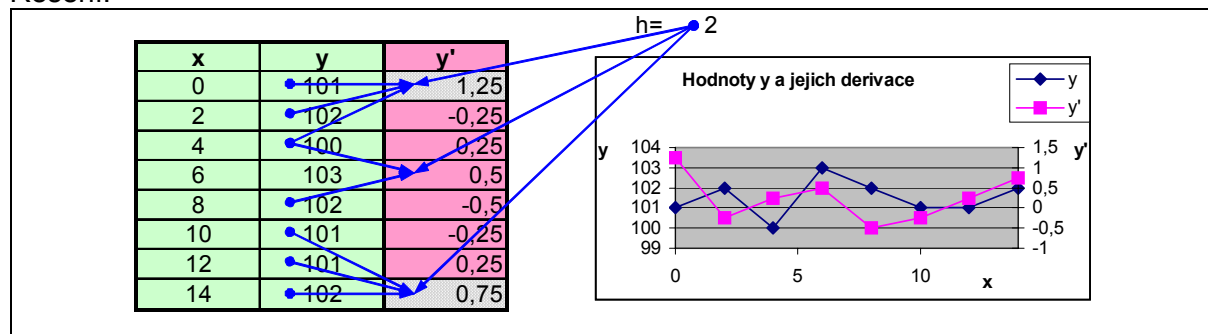
- o chceme-li hodnoty derivace v bodech analyticky dané funkce  $y=f(x)$ , je nutno ji nejprve tabelovat se zvoleným krokem  $h$ . Potom  $x_{i+1}=x_i+h$
- o při vynášení hodnot  $y$  a  $y'$  do téhož grafu je pravděpodobná nutnost použití vedlejší ypsilonové osy

**Jednoduchý příklad:**

Určete derivaci funkce dané tabulkou  $y=f(x)$ .

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14
$y$	101	102	100	103	102	101	101	102

Řešení:



**5. Aproximace funkcí – str.1****Vstup:**

naměřené hodnoty závisle proměnné  $y$  v bodech nezávisle proměnné  $x$ . Předpokládáme, že  $y=f(x)$  ( $y$  je funkcí  $x$ ), popř.  $y=f(x_1, x_2, \dots)$  pro funkci více proměnných)

$x$	$y$
$x_1$	$y_1$
$x_2$	$y_2$
...	...
$x_N$	$y_N$

**Cíl:**

Matematický popis naměřených dat, tj. hledáme tvar funkce  $f(x)$  a to včetně všech jejích parametrů – tj.  $y=f(x)=ax+b$  popř.  $y=f(x)=a_1 \cdot f_1(x_1)+a_2 \cdot f_2(x_2)+\dots +b$ .

Při aproximaci jinou než lineární funkcí předpokládáme, že  $x_1, x_2, \dots$  lze spočítat z  $x$  (viz příklad)

**Princip:**

Pro vybranou funkci jsou její parametry určeny metodou nejmenších čtverců

**Postup:**

1. Vybrat vhodnou aproximační funkci v obecném tvaru (např.  $y=ax+b$ ,  $y=a_1x^2+a_2x+b$ , apod.) Pomůckou může být vynesení naměřených hodnot do grafu (typu XY!).  
Poznámka: Tvar aproximační funkce může být i předepsán, pak tento krok odpadá.
2. Stanovit hodnoty parametrů aproximační funkce – tj. např. určit hodnoty  $a, b$ .  
V Excelu:
  - A. v některých případech lze využít nabídky PŘIDAT SPOJNICI TRENDU v grafu, je-li jako objekt vybrána datová řada. Pozor! Je zapotřebí vybrat správný typ trendu a zaškrtnout možnost zobrazení rovnice regrese, popř. hodnotu koeficientu spolehlivosti
    - + ... rychlé, nenáročné
    - ... nelze použít vždy
    - ... nemožnost odkazovat se na konstanty parametrů funkce
  - B. použití funkce LINREGRESE:
    - Vložit ji do oblasti o tolika sloupcích, kolik konstant chci spočítat, a o 5 řádcích
    - správně vyplnit její argumenty – pole  $y$ , pole  $x$  musí být souvislá oblast  $x_1, x_2, \dots$ , zda chci počítat konstantu  $b$  ( $B=1$ ) a zda chci počítat další statistické údaje ( $STAT=1$ )
    - + ... možno použít ji i na funkci více proměnných
    - + ... možno se odkazovat na konstanty ve výsledku
    - ... nutno si pamatovat uložení výsledků ve výsledné oblasti – viz příklad
    - ... může nastat nutnost linearizace funkce – např. pro  $y=a \cdot e^{bx}$  - zde pomůže zlogaritmování rovnice, pozor potom na přepočtení koeficientů!
3. Dopočítat hodnoty závisle proměnné podle nalezeného aproximačního vztahu, popř. určit odchylky
4. Podle vhodného kritéria (součet čtverců odchylek (má být co nejmenší), koeficient spolehlivosti (má se blížit 1), průměrná relativní odchylka (má být co nejmenší), apod.) posoudit kvalitu aproximace

**5. Aproximace funkcí – str. 2**

**Upozornění:**

- o může se vyskytnout nutnost linearizace funkce
- o funkce LINREGRESE se potvrzuje do oblasti buněk stiskem CTRL+SHIFT+ENTER
- o při použití funkce LINREGRESE jsou hodnoty hledaných konstant v 1. řádku výsledné tabulky – poslední číslo je konstanta *b*, ostatní konstanty *a*<sub>1</sub>, *a*<sub>2</sub>,... jdou v obráceném pořadí, než jak byly seřazeny sloupce hodnot nezávisle proměnných *x*<sub>1</sub>, *x*<sub>2</sub>,...
- o je třeba se nenechat "zahltit" čísly, ale stále se orientovat, co které znamená!
- o při vynášení odchylek do téhož grafu jako naměřené a vypočtené hodnoty se pravděpodobně vyskytne nutnost vedlejší ypsilonové osy

**Jednoduchý příklad:**

Aproximujte naměřená data předepsanou funkční závislostí:

$$y = f(x) = a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \sin(x) + b$$

<b>x</b>	1,0	2,5	5,7	6,1	7,3	8,0	9,2	12,0
<b>y</b>	-3,2	-5,6	-8,6	-7,8	-5,8	-5,6	-7,2	-8,8

**Řešení:**

**Předepsaná aproximační závislost:**  $y = a_1 \cdot \frac{1}{x} + a_2 \cdot \sin(x) + b$

**Naměřené hodnoty**

x	y
1,0	-3,2
2,5	-5,6
5,7	-8,6
6,1	-7,8
7,3	-5,8
8,0	-5,6
9,2	-7,2
12,0	-8,8

**Příprava hodnot pro použití funkce LINREGRESE:**

<i>x</i> <sub>1</sub> =1/ <i>x</i>	<i>x</i> <sub>2</sub> =sin( <i>x</i> )
1,000	0,841
0,400	0,598
0,175	-0,551
0,164	-0,182
0,137	0,850
0,125	0,989
0,109	0,223
0,083	-0,537

**Vypočtené hodnoty**

y	<i>y</i>	<i>y</i> <sup>2</sup>
-3,218	-0,018	0,000
-5,542	0,058	0,003
-8,562	0,038	0,001
-7,848	-0,048	0,002
-5,833	0,033	0,001
-5,588	0,012	0,000
-7,194	0,006	0,000
-8,814	-0,014	0,000
		0,009

Součet čtverců odchylek

**Výsledky funkce LINREGRESE:**

<i>a</i> <sub>2</sub>	<i>a</i> <sub>1</sub>	<i>b</i>
2,0312665	3,05105696	-7,978549
0,0275808	0,05659725	0,020629
0,9996405	0,04225802	#N/A
6951,1991	5	#N/A
24,826071	0,0089287	#N/A

Koeficient spolehlivosti: 0,9996405

Součet čtverců odchylek: 0,009

**Nalezená aproximační závislost:**

$$y = 3,051 \cdot \frac{1}{x} + 2,031 \cdot \sin(x) - 7,978$$

**Výsledek aproximace**