Jean Baptiste Joseph Fourier
1768-1830

Fourierova transformace ve zpracování obrazů

6. přednáška
předmětu Zpracování obrazů

Martina Mudrová
2004

Motivace

Proč používat Fourierovu transformaci ?

- základní matematický nástroj ve zpracování digitálních obrazů

✓detekce hran a segmentace obrazu

✓ úprava kvality obrazu

✓ rekonstrukce obrazu

✓ komprese obrazu (formát .JPG)

✓ detekce objektů

✓ atd.

Matematické minimum

= převod mezi časovou $x(t)$ a frekvenční $X(f)$ oblastí

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

t...časová (prostorová oblast)
f...frekvenční oblast

Základní definice:

přímá spojitá FT:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i\,2\pi f}\, dt$$

zpětná spojitá FT:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+i\,2\pi f}\, df$$

Požadavky na $f(t)$: po částech spojitá

integrovatelná $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

Příklad spojité FT

Jak vypadá FT periodických funkcí ?

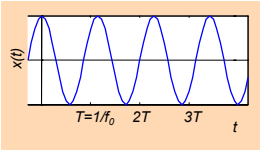
$$x(t) = \sin(2\pi\ f_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad X(f) = \frac{1}{2i}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$$

Def. FT: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$

Eulerovy vzorce: $e^{\pm i 2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) \pm i \sin(2\pi f_0 t)$

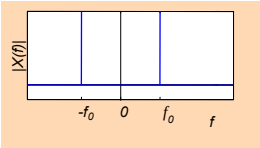
d(*f*)… Diracova funkce

Časová (prostorová) oblast x(t)



⇔

Spektrum |X(f)| (amplitudová fr. charakt.)



Od spojité k diskrétní FT

Co je diskrétní FT ?

Diskretizace v čase: ***t Y t_n Y n*** + Diskretizace ve frekvenci: ***f Y f_k Y k***

Diskrétní Fourierova transformace

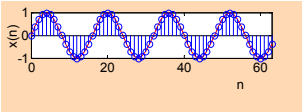
Přímá diskrétní FT:

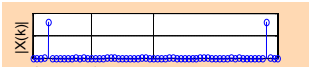
$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2\pi\frac{nk}{N}}$$

$$x(n) \Leftrightarrow X(k)$$

Zpětná diskrétní FT:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{+i2\pi\frac{kn}{N}}$$



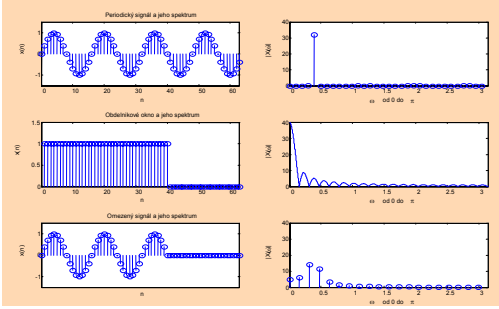


0	15	31	k…index 63
0	1.57	3.14	ω_k …kruhová frekvence
0	0.25	0.5	*f* …normalizovaná frekv.

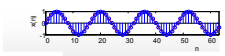
Omezení vzorové funkce v čase (prostoru)

Funkce s konečnou délkou …

= váhování = apodizace



Do dvou dimenzí



n -> [n, m] ***k -> [k, l]***

2D DFT

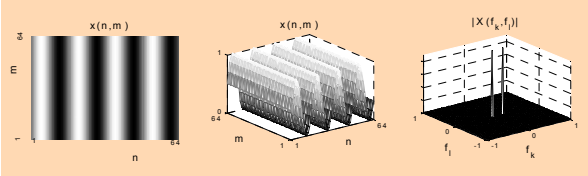
Přímá 2D DFT:

$$X(k,l) = \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x(n,m)\, e^{-i2\pi\left(\frac{kn}{N}+\frac{lm}{M}\right)}$$

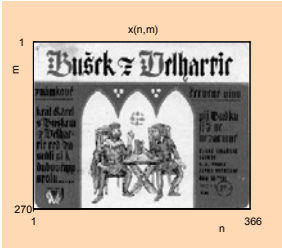
$$x(n,m) \Leftrightarrow X(k,l)$$

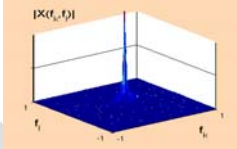
Zpětná 2D DFT:

$$x(n,m) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} X(k,l)\, e^{+i2\pi\left(\frac{nk}{N}+\frac{ml}{M}\right)}$$

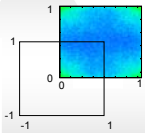


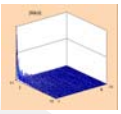
Příklad 2D DFT reálného obrazu





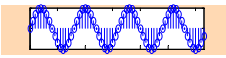
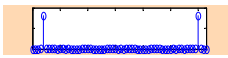
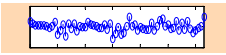
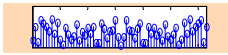
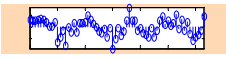
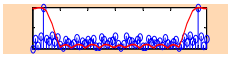
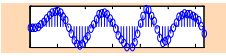
Symetrie



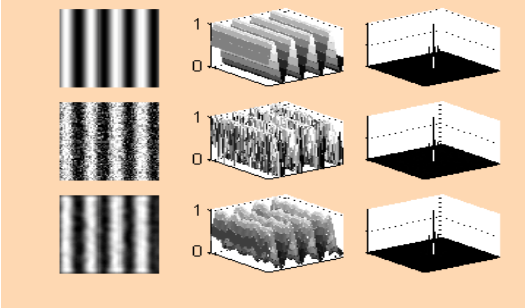


Princip číslicové filtrace

Co se stane při úpravě spektra?

	prostorová oblast x(n)	spektrum |X(k)|
1. periodická funkce		
2. náhodný šum		
3. =1.+2.		
4. po úpravě spektra		

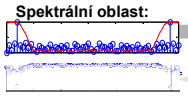
2D filtrace



Princip diskrétní konvoluce

Co se při úpravě spektra děje v prostorové oblasti?

Spektrální oblast:



$$Y(k) = X(k).H(k) \quad \text{pro} \forall k$$

Součin

Prostorová oblast:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{j=0}^{n} x(j)h(n-j)$$

Konvoluce

Kde: $y(n)$...žádaný tvar funkce
$x(n)$...daný (poškozený) tvar funkce
$h(n)$ ...číslicový filtr

Příklad diskrétní konvoluce

Jaký má význam konvoluce?

Příklad: ***x(n) = 10; 20; 30; 40; 50***
h(n) = 0,5; 0,5

(Klouzavý průměr)

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{j=0}^{n} x(j)h(n-j)$$

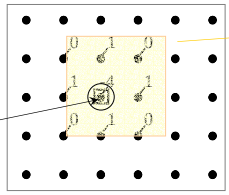
n=0	j=0	f(0).h(0)	10 . 0,5	5	y(0)=	5
n=1	j=0	f(0).h(1-0)	10 . 0,5	5		
	j=1	f(1).h(1-1)	20 . 0,5	10	y(1)=5+10 =	15
n=2	j=0	f(0).h(2-0)	nedef.			
	j=1	f(1).h(2-1)	20 . 0,5	10		
	j=2	f(2).h(2-2)	30 . 0,5	15	y(2)=10+15=	25
n=3	j=0	f(0).h(3-0)	nedef.			
	j=1	f(1).h(3-1)	nedef.			
	j=2	f(2).h(3-2)	30 . 0,5	15		
	j=3	f(3).h(3-3)	40 . 0,5	20	y(3)=15+20=	35
n=4	j=0,1,2		nedef.			
	j=3	f(4).h(4-3)	40 . 0,5	20		
	j=4	f(4).h(4-4)	50 . 0,5	25	y(4)=25+20=	45

y(n) = 5; 15; 25; 35; 45

2D diskrétní konvoluce

Jak vypadá 2D konvoluce?

$$y(n,m) = x(n,m) * h(n,m) = \sum_{j_1=0}^{n} \sum_{j_2=0}^{m} x(j_1, j_2) h(n - j_1, m - j_2)$$



Aplikace I – detekce hran

Úloha detekce hran

(=>segmentace obrazu)

Hrana = náhlá změna obrazové funkce

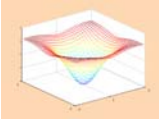
Princip:

Aplikace hranových detektorů
= hornopropustných filtrů

Příklad matice filtru h(n,m)
(filtr Prewittové)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Příklad spektra filtru $|H(k,l)|$



Originální obraz

Obraz po detekci hran

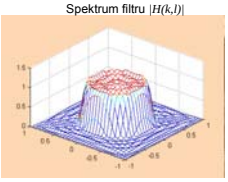
Aplikace II – potlačení šumu

Úprava obrazu

Princip:

Potlačení vysokofrekvenčních složek
aplikací dolnopropustného filtru

Spektrum filtru $|H(k,l)|$



Originální obraz

Obraz po úpravě

Aplikace III – ostření

Úloha rekonstrukce poškozeného obrazu

Princip:

- Inverzní filtrace
- Wienerova filtrace

Typ poškození:

- Rozostření pohybem objektu (objektivu)
- Špatné zaostření objektivu
- Turbulence atmosféry
- atd.

Poškozený obraz

Obraz po rekonstrukci

Aplikace IV – detekce objektů

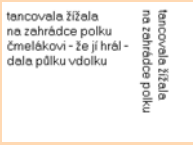
Úloha detekce polohy objektu

Princip:

- Výpočet korelační funkce
  = konvoluce v prostor. oblasti
- Zrychlení výpočtu
  aplikací algoritmu FFT ve 2D
  -> součin ve frekvenční oblasti

Filtr h(n,m)

Obraz x(n,m)



Korelační funkce h(n,m)

Pokročilejší metody zpracování obrazů

Short-time Fourier transform = krátká FT
- Kompromis mezi časovým (prostorovým) a frekvenčním rozlišením

Wavelet transformace´= vlnková transformace
- používá časová (prostorová) okénka s proměnlivou délkou (wavelet funkce)
- Aplikace v analýze obrazu, potlačení šumu, kompresi dat,…

Radonova transformace (p. Radon – české národnosti**)**
- konverze z cylindrických souřadnic
- aplikace především v biomedicíně (PET, SPECT, CT, …)

…