

A photograph of two white swans on a dark body of water. The swan in the foreground is facing left, with its head turned slightly towards the camera. The swan behind it is also facing left, with its wings partially spread. The water is dark and reflects the swans. The text is overlaid on the right side of the image.

Dodatky k FT:

1. (2D digitalizace)
2. Více o FT
3. Více k užití filtrů

7. přednáška předmětu
Zpracování obrazů

Martina Mudrová
2004

Pořízení digitálního obrazu



Obvykle:

Proces transformace spojité předlohy (reality) do 1-3 diskrétních funkcí f
kartézských diskrétních proměnných (m,n)
(digitální fotoaparáty, skenery,...)

Další obvyklé případy:

- Sledování diskrétních procesů (počítačová tomografie)
- Použití jiných než pravoúhlých souřadnic (trojúhelníková, hexagonální síť, cylindrické souřadnice,...)

Digitalizace obrazu se skládá ze **2 součástí**:

1. Vzorkování (prostorové rozlišení)
2. Kvantifikace hodnot barev (radiometrické rozlišení)

Animované sekvence, film:

3. Časové rozlišení (obvykle 25snímků/s)

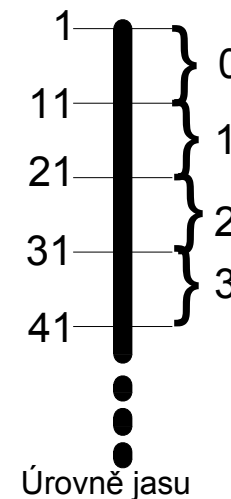
Kvantifikace barev



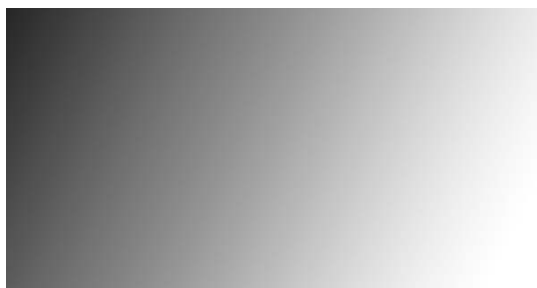
- počet k možných hodnot jasové funkce závisí na bitové hloubce b :

$$k=2^b$$

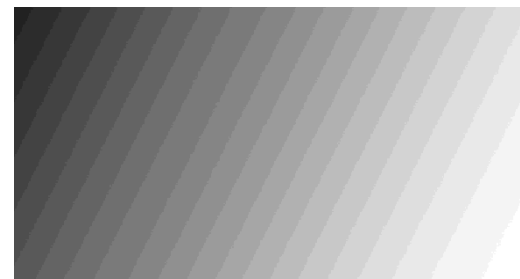
- lidské oko je schopno rozlišit okolo 50 úrovní jasu



256 jasových úrovní



24 jasových úrovní



Vzorkování

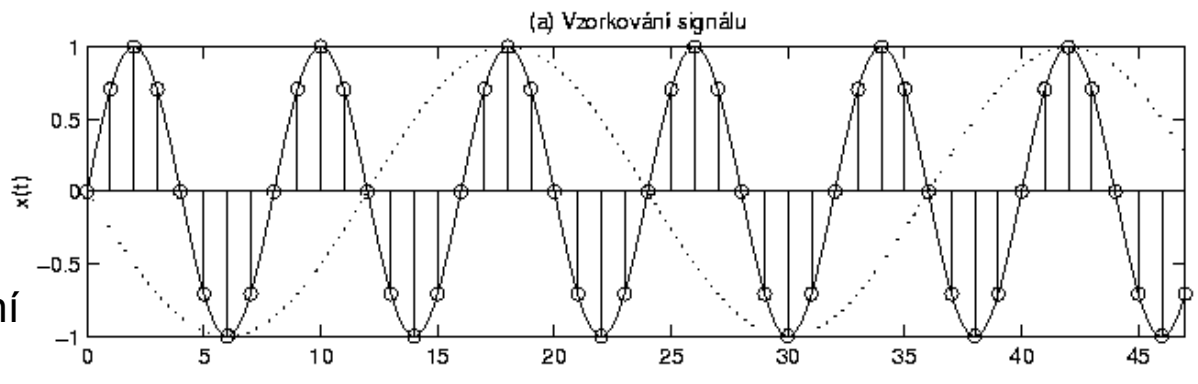


v 1D:

$$x(n) = x(nT_s)$$

$n \in I$

T_s ...perioda vzorkování



Shannonův teorém:

Vzorkovací frekvence f_s musí být alespoň dvakrát vyšší než nejvyšší zajímavá frekvence f_{max} obsažená v originálním (spojitém) signálu

$$f_s > 2f_{max}$$

$$f_s = 1/T_s$$

-> perioda vzorkování T_s musí být alespoň dvakrát menší než nejmenší detail v obraze

Metody vzorkování:

Bodové vzorkování

Plošné vzorkování -> supersampling

Alias efekt



Co se děje, nerespektujeme-li Shannonův teorém?

Příklad časového aliasingu:

Hodiny s jednou ručičkou:

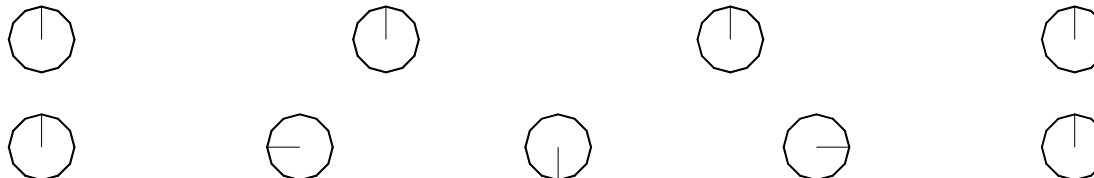
Vhodná volba
periody vzorkování



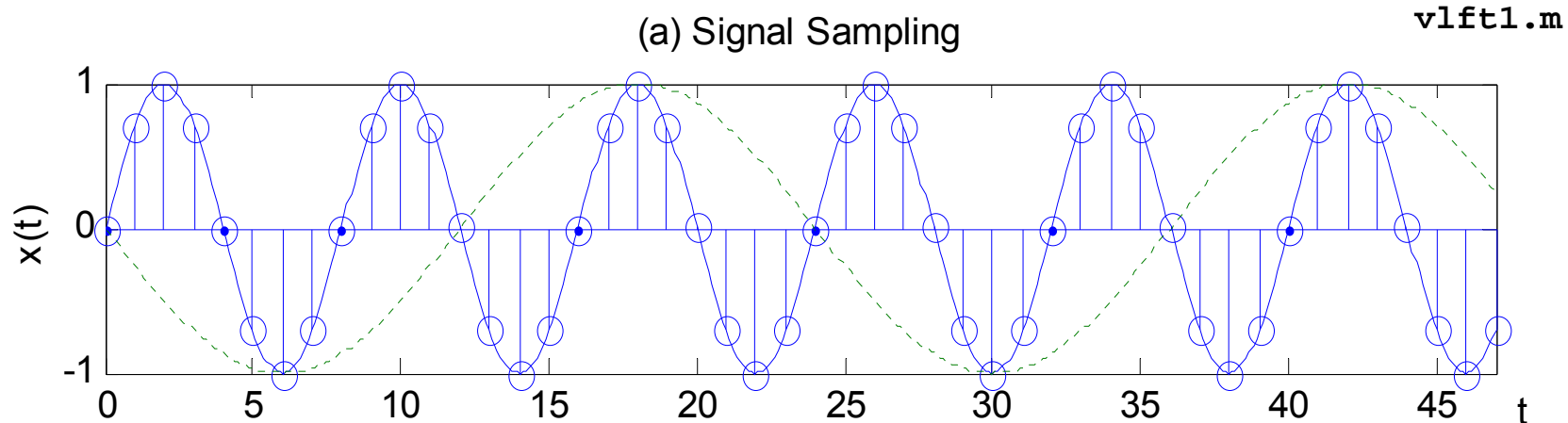
Limitní případ volby
periody vzorkování



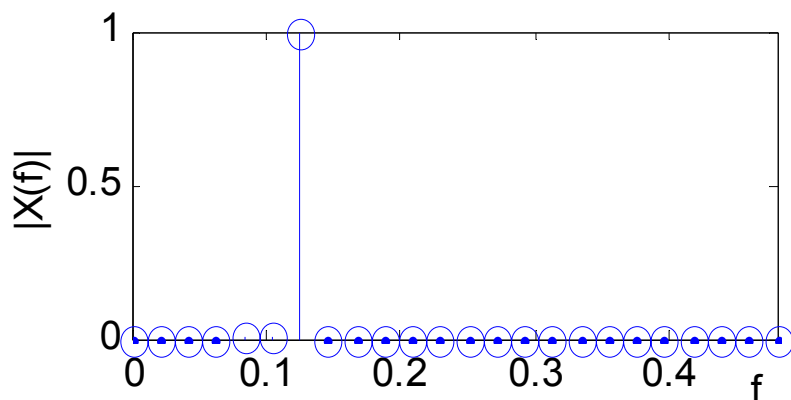
Nevhodná volba
periody vzorkování
- ALIAS



Alias efekt ve frekvenční oblasti

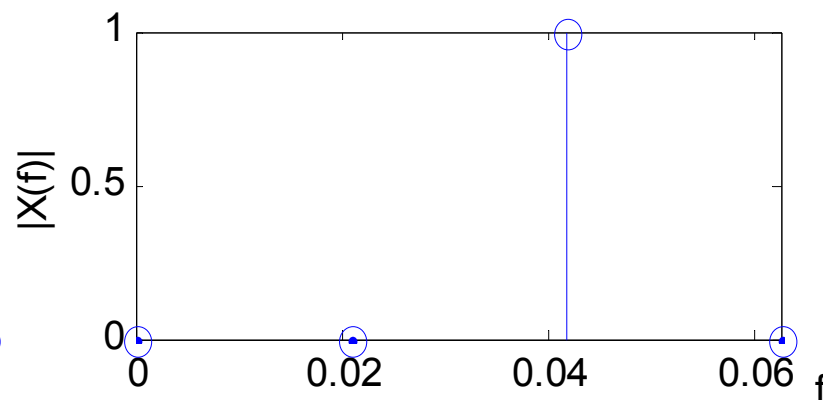


(b) Spectrum with sampling frequency f_{s1}



Sampling period $T_s=1s$

(c) Spectrum with sampling frequency f_{s2}



Sampling period $T_s=6s$

Interpretace 1D frekv. spektra

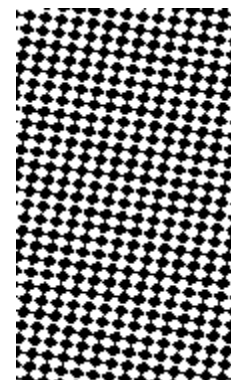
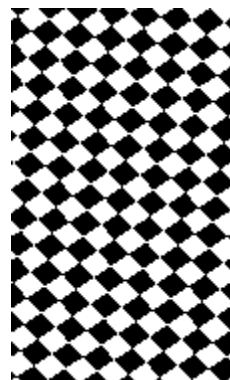
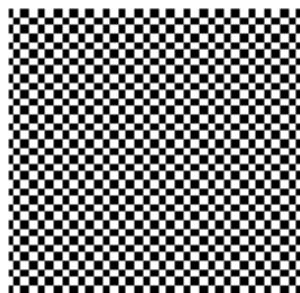
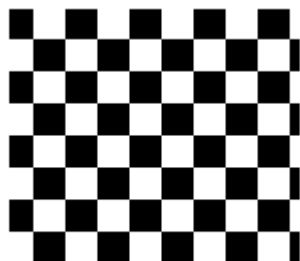


| | Spojité | Vzorec vzorkování | Diskrétní $T_s=1s$ | Diskrétní $T_s=6s$ |
|--------------------------------|-------------------------------|---|--|--|
| Vzorkovací fr. | | $f_s=1/T_s$ | $1/1=1$ | $1/6$ |
| čas | t | $x_n=n.T_s \Rightarrow n$ | $0,1,...47$ | $0,6,...47$ |
| Délka signálu | $T=48s$ | $N=T/T_s$ | $N=48/1=48$ | $=48/6=8$ |
| Normalizovaná frekvence f | $f=0/T..t/T..T/T$ $<0,1)$ | $f_k=k/T= k/(NT_s)$ $\Rightarrow k$ | $0,1/48,...,47/48$ $\Rightarrow 0,1,...,47$ | $=0,1/(8*6),...,7/(8*6)$ $\Rightarrow 0,1,...,7$ |
| Nyquist. Frekv. f_{max} | | $f_{max} < f_s/2$ | $<1/2=0.5$ | $<1/6/2=1/12=0.083$ |
| Frekvenční rozlišení v f | | $\Delta f= 1/(NT_s)$ | $=1/48$ | $=1/(8*6)=1/48$ |
| Kruhová frekvence ω | $\omega=2\pi f$ $<0,2\pi)$ | $\omega_k=2\pi k/(NT_s)$ $\Rightarrow k$ | $0,2\pi/48,...,2\pi 47/48$ $\Rightarrow 0,1,...,47$ | $0,2\pi/(8*6),...,2\pi 7/(8*6)$ $\Rightarrow 0,1,...,7$ |
| Frekv. rozl. v ω | | $\Delta\omega=2\pi/(NT_s)$ | $=2\pi/48$ | $=2\pi/(8*6)$ |

Alias efekt ve 2D



= Moire efekt:



Metody pro potlačení moiré efektu:

- supersampling: posun alias efektu k vyšším frekv.
 1. vzorkování s vyšší frekvencí než je požadavek
 2. filtrace
 3. podvzorkování
- stochastické vzorkování: Mění alias efekt na šum
 - jittering – použití neuniformní vzorkovací mřížky

1D Fourierovy transformace (Plural!)



| Čas | <i>aperiod.</i> | <i>period.</i> | |
|---------------|--|-----------------------------------|------------------|
| <i>spoj.</i> | <p>Fourier Transform</p> | <p>Fourier Series</p> | <i>aperiod.</i> |
| <i>diskr.</i> | <p>Discrete Time Fourier Transform</p> | <p>Discrete Fourier Transform</p> | <i>period.</i> |
| | <i>spoj.</i> | <i>diskr.</i> | Frekvence |

Vzorkování v jedné oblasti \Leftrightarrow Periodizace v druhé oblasti

Poznámky k diskrétní Fourierově transformaci

(reálného signálu)



$$x(n) \Leftrightarrow F(x(n)) \Leftrightarrow X(k)$$

- (2D) DFT **je lineární**: $F(a.x(n)+b.y(n))=a.F(x(n))+b.F(y(n))$
- (2D) Operace **konvoluce** (kruhová) v jedné oblasti **vede na násobení** v druhé oblasti:
$$x(n).y(n) \Leftrightarrow x(k)*y(k);$$
$$x(n)*y(n) \Leftrightarrow X(k).Y(k)$$
- (2D) Jak $x(n)$ tak $X(k)$ jsou **periodické funkce** s periodou N
- (2D) Jak $x(n)$ tak $X(k)$ jsou **sudé funkce**
- (2D) Amplitudové frekv. spektrum je čárové pouze při speciální volbě N , n_p a T_s :
kde n_p ...počet vzorků jedné periody, N ... délka signálu:

$$N=n_p.T_s$$

a $r.N=s.T_s$ kde $n,s \in I$ (přirozená čísla)

- 2D DFT **je separabilní**: $F(k,l)=F(k,F(l))$

Spektrum



$$x(n) \Leftrightarrow X(k), \quad X(k) = \text{Re}(k) + i \cdot \text{Im}(k)$$

Amplitudové frekvenční spektrum:

$$|X_k| = \sqrt{\text{Re}(k)^2 + \text{Im}(k)^2}$$

Fázové frekvenční spektrum:

$$\varphi(k) = \text{atan}\left(\frac{\text{Re}(k)}{\text{Im}(k)}\right)$$

DFT vybraných signálů



Co se děje v druhé oblasti, když v jedné je signál omezený?

Omezený signál v jedné oblasti \Leftrightarrow Nekonečný signál v druhé oblasti

Co se stane v druhé oblasti, když v jedné oblasti doplním signál nulami na jinou délku?

Doplnění nulami v jedné oblasti \Leftrightarrow „Hustší“ (Více hodnot) v druhé oblasti

!! Nezvyšuje se však frekvenční rozlišení !!

Kruhová konvoluce a její použití



ftext.m

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)h(n-j) = \sum_{j=0}^{N-1} x(n-j)h(j)$$

Použitím algoritmu FFT je možno urychlit výpočet:

$$y(n) = \text{IDFT}(X(k) \cdot H(k))$$

- Možno využít i při výpočtu korelačních koeficientů

Návrh 2D číslicových filtrů



frf.m

- nejčastěji rozšířením 1D číslicového filtru do 2D

Typy číslicových filtrů:

- FIR (finite impulse response filters) → $H(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N c_{ij} z_1^i z_2^j$
- IIR (infinite impulse response filters) → $H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i=0}^{M_a} \sum_{j=0}^{N_a} c_{ij} z_1^i z_2^j}{\sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} c_{ij} z_1^i z_2^j}$
- Lineární filtrace
- Nelineární filtrace
- Použití 2D Z-transformace - nevhodné
- Vhodné rozšíření 1D filtrů do 2D

Potlačení rušivých složek



obrazok.m
fs2.m

Co považujeme za šum?

- Rušivou informací, která ztěžuje porozumění požadované informaci (vše kromě požadované informace)
- pro popis se užívají statistické veličiny
- obvyklé typy šumu:
 - Gaussovský
 - Bílý
 - Výstřelový (salt&pepper)
 - ...

- Additive
- Multiple

Metody pro potlačení šumu:

- Lineární (pro aditivní šum)
 - Nelineární (např. mediánová filtrace)
- V prostorové oblasti (např. průměrování)
 - Ve frekv. oblasti (n. dolnoproústné filtry)

Ideální dolnoproústný filtr:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{for } \sqrt{(u^2 + v^2)} \leq D_0 \\ 0 & \text{for } \sqrt{(u^2 + v^2)} > D_0 \end{cases} \quad \text{kde } D_0 \dots \text{mezní frekvence}$$

Detekce hran



Co je to hrana?

Fs2.m

- Takové místo v obraze, kde se náhle mění hodnota obrazové funkce
- Odpovídá vysokým frekvencím
- Matematickým nástrojem pro popis změny je derivace
-> difference v diskrétním př.

Proč chceme v obrázcích detekovan hrany?

První krok při segmentaci obrazu, detekci objektů, klasifikaci,...

Zvýraznění kontur

...

Metody detekce hran:

- V prostorové oblasti (Roberts, Sobel, Laplacian,...)
- Ve frekvenční oblasti (hornopropustné filtry)
- Obvykle následuje prahování

Ideální hornopropustný filtr:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{for } \sqrt{(u^2 + v^2)} \leq D_0 \\ 1 & \text{for } \sqrt{(u^2 + v^2)} > D_0 \end{cases}$$

kde

D_0 ... mezní frekvence

Příkazy Matlabu pro práci s filtry



obrazok.m

`fft2` ... 2D rychlá Fourier. transformace
`fftshift`...posunutí počátku frekv. Souřad. systému
`remez`...návrh 1D filtru
`freqz`... frekvenční charakteristika 1D filtru
`ftrans2`...návrh 2D filtru z 1D
`freqz2` ...frekvenční charakteristika 2D filtru
`filter2`...2D filtrace
`conv2`...2D konvoluce
`fspecial`...návrh speciálních 2D filtrů
`edge`... detekce hran

Příklad



Filtrace obrazu

Podrobte daný obrázek 2D filtraci zvoleným filtrem. Zobrazte amplitudovou frekv. charakteristiku filtru

```
% Filtrace obrazu

delete(get(0,'children'))
clear

[x,map]=imread('busek.bmp');
I=ind2gray(x,map);imshow(I,128)
h=fspecial('unsharp');

J=filter2(h,I);
figure(2)
imshow(mat2gray(J),128)

figure(3)
freqz2(h,[32 32]);
```

