Zpracování obrazů 2

Wavelet transformace

Petra Slavíková

Podzim 2008

Obsah

Úvod

- Proč nová transformace?

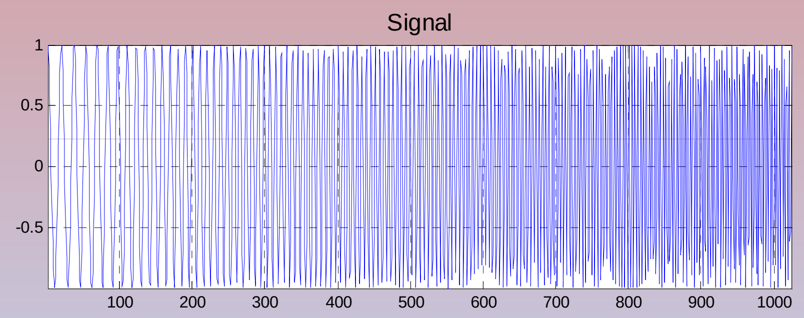
Analýza nestacionárních signálů

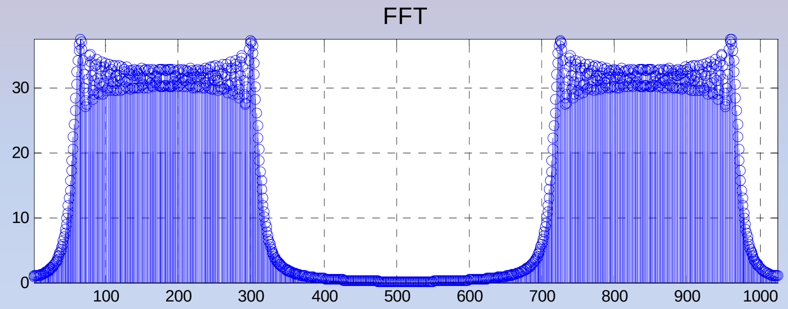
- Short Time Fourier Transform

Wavelet transformace

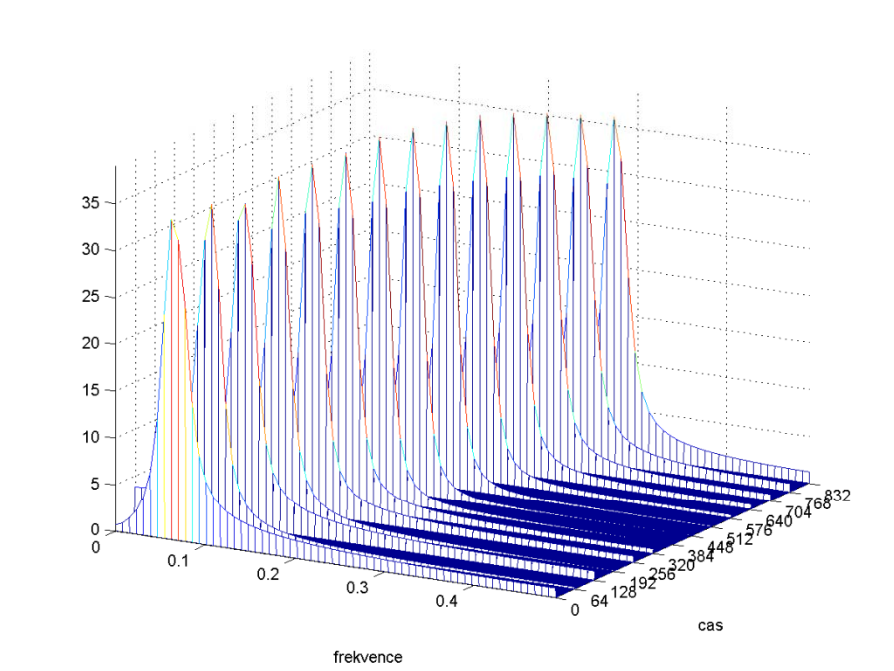
- Definice
- Mallatovo schéma
- Wavelet a Scaling funkce
- Typy wavelet funkcí

- pokrýt nevýhody Fourierovy transformace





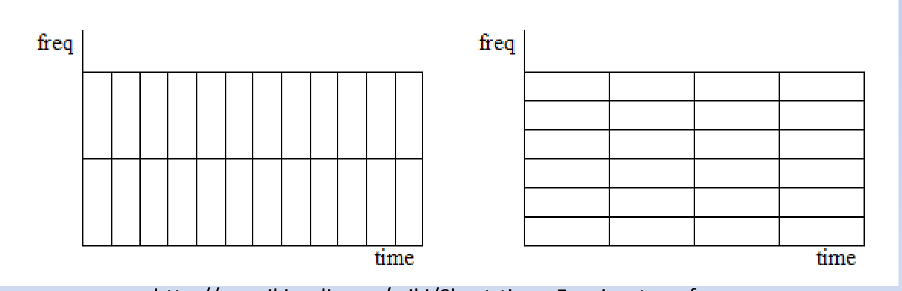
- částečné řešení pomocí STFT



Definice: $$STFT\{x(n)\} \equiv X(n,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)w(m-n)e^{-j\omega m}$$

x, X	signál před/po STFT
n	délka signálu
m	délka okna
w	okno
ω	diskrétní kruhová frekvence

Časové × frekvenční rozlišení



http://en.wikipedia.org/wiki/Short-time_Fourier_transform

- Heisenbergův princip neurčitosti: $\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
  - ve smyslu STFT: pokud zvýšíme frekvenční rozlišení, zhorší se časové a naopak

Wavelet transformace

Spojitá wavelet transformace

$$CWT\{x(t)\} \equiv X(a,\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t)\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

$\psi(t)$	základní (*mother*) wavelet funkce
a	měřítko; $a < 1$ – kontrakce (smršťování), $a > 1$ – dilatace (natahování)
τ	časový faktor

$$\psi(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$ odvozená (*baby*) wavelet funkce

Diskrétní wavelet transformace

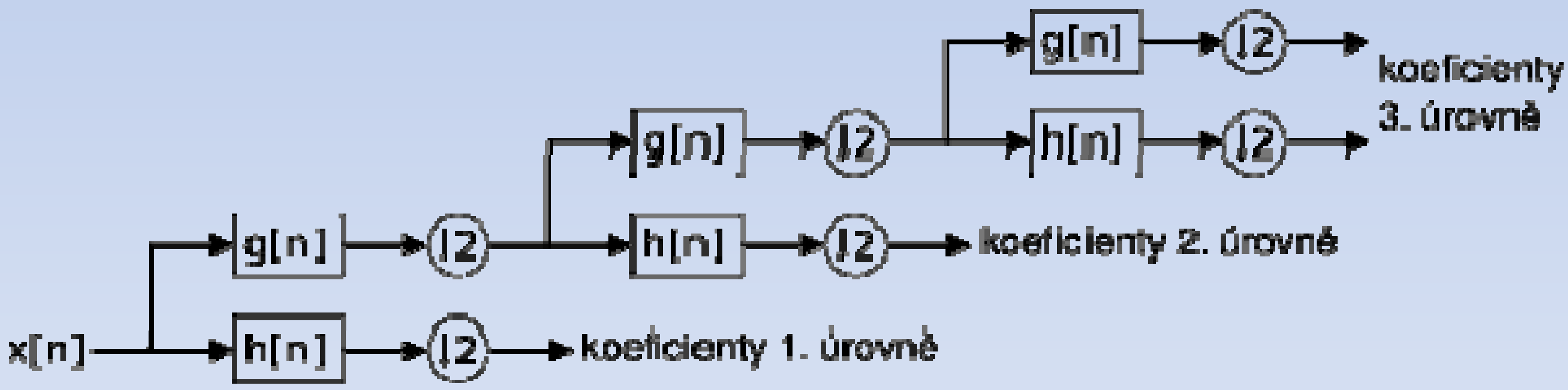
$$DWT\{x(k)\} \equiv X(m,n) = 2^{-\frac{m}{2}} \sum_k x(k)\psi\left(2^{-m}k-n\right)$$

$\psi(t)$	mateřská wavelet funkce
m,n	wavelet koecienty; m – meřítko, n – časový index

$$\psi(m,n) = 2^{-\frac{m}{2}}\psi\left(2^{-m}k-n\right)$$ odvozená (*baby*) wavelet funkce

Wavelet transformace

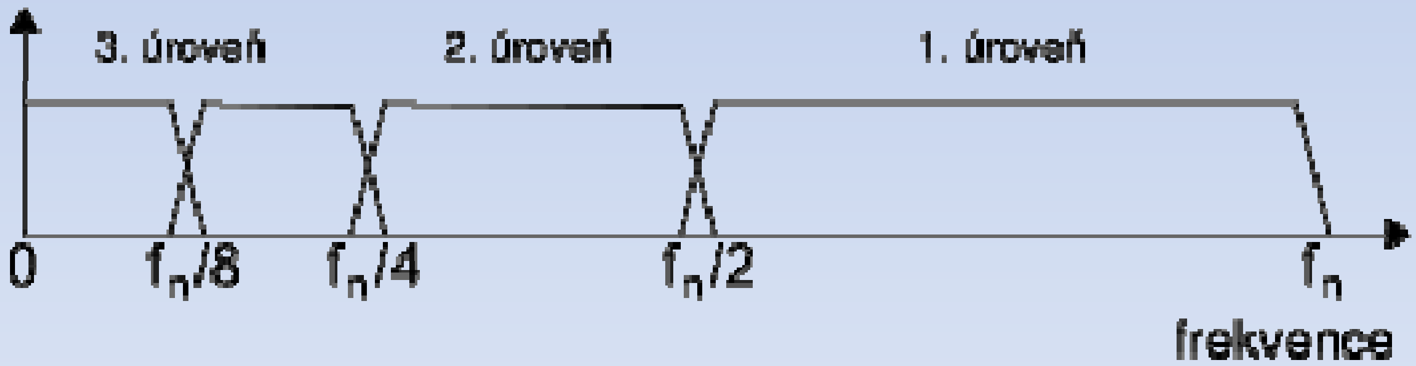
- při wavelet transformaci dochází ke konvoluci signálu s wavelet a scaling funkcí
- získáme dvě sady hodnot (wavelet $h(n)$ a scaling $g(n)$ koeficienty), každou s N-počtem hodnot => po WT máme signál s $2N$ vzorků
- musíme signál podvzorkovat dvěma, abychom získali opět N hodnot



http://cs.wikipedia.org/wiki/Diskr%C3%A9tn%C3%AD_vlnkov%C3%A1_transformace

Wavelet transformace

- *wavelet* a *scaling* funkce jsou navzájem komplementárními filtry
  - *wavelet* – hornopropustný (zachovává vyšší frekvence)
  - *scaling* – dolnopropustný (zachovává nižší frekvence)
- dekompozicí signálu vzniknou dvě množiny *wavelet* a *scaling* koeficientů
- při dekompozici do další úrovně se vychází ze *scaling* koeficientů, které jsou rozděleny na další dvě množiny o polovičním počtu vzorků



Scaling

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$$

$\varphi(x)$	základní (*mother*) scaling funkce
k	parametr reprezentující pozici
j	parametr reprezentující šířku
$2^{j/2}$	reprezentuje výšku (amplitudu)

- tvar *scaling* funkce se mění s j - mění měřítko *„scale“*
  => *scaling funkce*

Wavelet

$$\psi(x) = \sqrt{2}\varphi(2x - n)$$

$\psi(x)$	základní (*mother*) wavelet funkce

- představuje rozdíl mezi aktuální aproximací a funkcí (signálem)

MATLAB Help
zadat „Wavelet Shapes“ do vyhledávače